[20Q]

- Supponiamo di avere una funzione $f : A \to C$; diremo che questa è **invariante** (o anche "**compatibile con** $\sim$") se

$$\forall x, y \in A, \quad x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y) \quad . \tag{2.193}$$

  Questo comporta che f è costante su ogni classe di equivalenza; dunque f **passa al quoziente**, cioè è ben definita una funzione $\tilde{f} : {}^{A}/_{\sim} \to B$ tale che $\tilde{f}([x]) = f(x)$ per ogni $x \in A$; cioè $\tilde{f} \circ \pi \equiv f$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & B \\ {}^{A}/_{\sim} \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

- Similmente ci comportiamo se f è una funzione a più argomenti $f : A_1 \times A_2 \times \dots A_n \to C$, e su uno o più di questi insiemi A_1 sono presenti relazioni di equivalenza: in questo caso possiamo far passare ai quozienti le variabili associate. Ad esempio nel caso che vi sia una relazione di equivalenza $\sim$ su A_1, richiederemo che

$$\forall x, y \in A_1, \forall a_2 \in A_2 \dots \forall a_n \in A_n \dots \quad x \sim y \Rightarrow f(x, a_2, \dots a_n) =$$

  e allora potremo *passare al quoziente* e definire la funzione $\tilde{f} : {}^{A_1}/_{\sim} \times A_2 \times \dots A_n \to C$ in modo che

$$\tilde{f}(\pi(x), a_2, \dots a_n) = f(x, a_2, \dots a_n) \quad .$$

- Un simile ragionamento può essere fatto per le relazioni $R \in A \times B$; formalmente possiamo ricondurci al caso precedente pensando a R come a una funzione che ha dominio $A \times B$ e codominio l'insieme {"vero","falso"}; per essere più espliciti, diremo che R è invariante rispetto alla relazione $\sim$ su A se

$$\forall x, y \in A, \forall b \in B \quad x \sim y \Rightarrow (xRb \Leftrightarrow yRb) \quad ;$$

  e in questo caso possiamo definire la relazione $\tilde{R}$ "*proiettata al quoziente*" fra ${}^{A}/_{\sim}$ e B.

- In certi casi invece una funzione *passa al quoziente* contemporaneamente al dominio e al codominio; vediamo il caso di una funzione di due argomenti, che sarà usato in seguito. Supponiamo di avere una funzione $f : A \times A \to A$; diremo che questa è **invariante** se

$$\begin{tikzcd} A \times A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi \times \pi"] & {} \\ {}^{A}/_{\sim} \times {}^{A}/_{\sim} \arrow[r, "\tilde{f}"'] & {} \end{tikzcd}$$

$$\forall x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in A, \quad (x \sim \tilde{x} \wedge y \sim \tilde{y}) \Rightarrow f(x, y) \sim f(\tilde{x}, \tilde{y}) \quad ; \tag{2.194}$$

  allora f **passa al quoziente**, cioè è ben definita una funzione

$$\tilde{f} : {}^{A}/_{\sim} \times {}^{A}/_{\sim} \to {}^{A}/_{\sim}$$

  tale che

$$\forall x, y \in A \quad \tilde{f}([x], [y]) = [f(x, y)] \quad .$$