Esercizio 6.8. [20V] Prerequisiti: [20T]. *Sia fissato $\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}$. Sappiamo che, per ogni $n \geq 1$ naturale, esiste ed è unico un $\beta > 0$ tale che $\beta^n = \alpha$, e β viene denotato dalla notazione $\sqrt[n]{\alpha}$. (Si veda ad es. la Proposizione 2.6.6 Cap. 2 Sez. 6 degli appunti del corso [**?**] oppure Teorema 1.21 in [**?**]). Dato $q \in \mathbb{Q}$, scriviamo $q = n/m$ con $n, m \in \mathbb{Z}, m \geq 1$, definiamo*

$$\alpha^q \stackrel{def}{=} \sqrt[m]{\alpha^n} \quad .$$

Mostrate che questa definizione non dipende dalla scelta della rappresentazione $q = n/m$; che

$$\alpha^q = \left(\sqrt[m]{\alpha}\right)^n \quad ;$$

che per $p, q \in \mathbb{Q}$

$$\alpha^q \alpha^p = \alpha^{p+q} \quad , \quad (\alpha^p)^q = \alpha^{(pq)} \quad ;$$

mostrate che quando $\alpha > 1$ allora $p \mapsto \alpha^p$ è strettamente monotona crescente.