

Esercizio 6.6. [20W] Prerequisiti: [20V]. Difficoltà: *. Fissato $\alpha > 1$,
definite, per $x \in \mathbb{R}$,

$$\alpha^x = \sup\{\alpha^p : p \in \mathbb{Q}, p \leq x\} \quad ;$$

mostrate che:

- è una buona definizione (cioè che l'insieme a destra è superiormente limitato e non vuoto).
- che se x è razionale allora α^x così definito coincide con la definizione nel precedente esercizio [20V];
- mostrate che $x \mapsto \alpha^x$ è strettamente crescente.
- Mostrate che

$$\alpha^x \alpha^y = \alpha^{x+y} \quad , \quad (\alpha^x)^y = \alpha^{(xy)} \quad .$$

Si veda anche l'esercizio [21N].