Teorema 7.20. [21C] *Assumiamo che $a_n \neq 0$. Sia $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ allora*

- *Se $\alpha < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente;*
- *se $\alpha \geq 1$ non si può concludere nulla.*

Dimostrazione.

- Se $\alpha < 1$, preso $L \in (\alpha, 1)$ si ha definitivamente $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < L$ dunque vi è un N per cui $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < L$ per ogni $n \geq N$, per induzione si mostra che $|a_n| \leq L^{n-N}|a_N|$ e si conclude per confronto con la serie geometrica.
- Vediamo alcuni esempi. Per le due serie $1/n$ e $1/n^2$ si ha $\alpha = 1$.

  Definendo

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n} & n \text{ pari} \\ 2^{2-n} & n \text{ dispari} \end{cases} \tag{7.21}$$

  si ottiene una serie convergente ma per cui $\alpha = 2$.

□