Teorema 7.23. [21D] *Se $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$ ha termini positivi ed è monotona (debolmente) decrescente, la serie converge se e solo se converge la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \quad .$$

Dimostrazione. Dato che la successione $(a_n)_n$ è decrescente, allora per $h \in \mathbb{N}$

$$2^h a_{2^{(h+1)}} \leq \sum_{k=2^h+1}^{2^{(h+1)}} a_k \leq 2^h a_{2^h} \quad . \tag{7.24}$$

Notiamo ora che

$$\sum_{h=0}^{N} \sum_{k=2^h+1}^{2^{(h+1)}} a_k = \sum_{n=2}^{2^{N+1}} a_n$$

e dunque

$$\sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k=2^h+1}^{2^{(h+1)}} a_k = \lim_{N\to\infty} \sum_{h=0}^{N} \sum_{k=2^h+1}^{2^{(h+1)}} a_k = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{2^{(N+1)}} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \quad .$$

dunque possiamo sommare i termini in (7.24) per ottenere

$$\sum_{h=0}^{\infty} 2^h a_{2^{(h+1)}} \leq \sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq \sum_{h=0}^{\infty} 2^h a_{2^h}$$

laddove il termini a destra è finito se e solo se quello a sinistra è finito, in quanto

$$\sum_{h=0}^{\infty} 2^h a_{2^h} = a_1 + 2 \sum_{h=0}^{\infty} 2^h a_{2^{(h+1)}} \quad :$$

si conclude la dimostrazione con il teorema di confronto. □