3.8 Numeri naturali in ZF [246]

In questa sezione costruiremo un modello dei numeri naturali all'interno della teoria ZF degli insiemi; questo modello soddisfa gli assiomi di Peano [1XD] e ha un ordinamento che soddisfa [26H], dunque questo modello gode di tutte le proprietà elencate in Sez. [1X9]; per questo motivo in questa sezione approfondiremo solo le proprietà specifiche di questo modello.

3.8.1 Successore

Definizione 3.195. *[24X]*

Esercizi

E3.196 [24V]

E3.197 [24M]

E3.198 [239]

E3.199 [245]

E3.200 [1YM]

E3.201 [24Q]

E3.202 [24S]

3.8.2 Numeri naturali in ZF

Definizione 3.203. *[243]*

Usando l'assioma dell'infinito [243] si può mostrare la esistenza dell'insieme dei numeri naturali.

Teorema 3.204. *[244]*

Esempio 3.205. *[291]*

Nota 3.206. *[25C]*

Possiamo anche dimostrare direttamente il principio di induzione.

Teorema 3.207 (Principio di induzione)**.** *[23B]*

Teorema 3.208. *[24D]*

Per dimostrare il teorema precedente si possono usare gli esercizi nella prossima sezione.

Nota 3.209. *[26K]*

Le proprietà dell'insieme ordinato $\mathbb{N}, \subseteq$ sono dunque queste.

Proposizione 3.210. *[26J]*

Per approfondimenti si veda negli appunti del corso (Cap. 1 Sez. 7 in [**?**]); o anche in [**?**],[**?**].

3.8.3 Insiemi transitivi

Definizione 3.211. *[24Z]*

Esempio 3.212. *[290]*

Esercizi

E3.213 [25J]

E3.214 [257]

E3.215 [26N]

E3.216 [26P]

Gli esercizi precendenti dimostrano il Teorema [24D], dopodiché dai risultati in Sez. [1X9] otteniamo che $(\mathbb{N}, \leq)$ è bene ordinato.

A seguire altri interessanti esercizi.

Esercizi

E3.217 [269]

E3.218 [265]

E3.219 [25D]

E3.220 [25W]

E3.221 [25Z]

3.8.4 Ordinali

Sfruttando i risultati precedenti, possiamo dare qualche cenno della teoria degli ordinali.

Definizione 3.222. *[26D]*

Esercizi

E3.223 [25Q]

E3.224 [25B]

E3.225 [25N]

E3.226 [25M]

E3.227 [25G]

E3.228 [255]

E3.229 [26S]

E3.230 [26V]

Nota 3.231. *[275]*

[(da sistemare)]