Lemma 4.13. [27N] *(Svolto il 2022-11-03)* $\forall n, h \in \mathbb{N}, f_{S(h)}(n) = S(f_h(n))$

Dimostrazione. Ricordiamo che $S(f_h(n)) = f_h(S(n))$ per definizione ricorsiva; consideriamo

$$P(n) \doteq \forall h \in \mathbb{N}, f_{S(h)}(n) = S(f_h(n)) \quad ;$$

$P(0)$ è la proposizione

$$\forall h \in \mathbb{N}, f_{S(h)}(0) = S(f_h(0)) = S(h)$$

che è vera perché è il valore iniziale della definizione ricorsiva di $f_{S(h)}$ e di f_h; per il passo induttivo assumiamo che $P(n)$ sia vera e studiamo $P(S(n))$ al cui interno possiamo dire

$$f_{S(h)}(S(n)) \overset{(1)}{=} S(f_{S(h)}(n)) \overset{(2)}{=}$$
$$SS(f_h(n)) \overset{(3)}{=} S(f_h(S(n)))$$

dove in (1) abbiamo usato la definizione ricorsiva di f_h con $S(h)$ invece di h, in (2) abbiamo usato la ipotesi induttiva, e in (3) la definizione ricorsiva di f_h; e questo completa il passo induttivo.
(Notate come nel primo passaggio è importante che nella definizione di $P(n)$ vi sia $\forall h \in \mathbb{N}, \ldots$). □