Proposizione 4.13. [27P](Replaces 27Y) *L'addizione è commutativa.*

Dimostrazione. Per il lemma possiamo scrivere

$$S(h) + n = S(h + n) = h + S(n) \tag{4.14}$$

intuitivamente la formula è simmetrica e dunque anche la definizione di addizione deve avere una simmetria. Precisamente, sia $\tilde{f}_n(h) \stackrel{\text{def}}{=} f_h(n)$ allora $\tilde{f}_n(0) = n$ (come già notato) e per il lemma [27N] $\tilde{f}_n(S(h)) = S\Big(\tilde{f}_n(h)\Big)$ ma allora $\tilde{f}$ soddisfa la stessa relazione ricorsiva di f e dunque sono identiche, così $f_h(n) = f_n(h)$. (L'idea è che se avessimo definito la addizione ricorsivamente partendo da sinistro invece che da destra, avremmo raggiunto lo stesso risultato). □