Proposizione 4.48. [28R]

- (Compatibilità di addizione e ordinamento) *Si ha $n \leq m$ se e solo se $n + k \leq m + k$.*

- (Compatibilità di moltiplicazione e ordinamento) *Quando $k \neq 0$ si ha $n \leq m$ se e solo se $n \times k \leq m \times k$.*

In particolare (ricordando [28M]*) la mappa $n \mapsto n \times h$ è strettamente crescente (e dunque iniettiva).*

Dimostrazione. Useremo alcune proprietà lasciate per esercizio.

- Se $n \leq m$, per definizione $m = n+h$, allora $n+k \leq m+k$ in quanto $m + k = n + h + k$ (notate che stiamo usando l'associatività). Se $n+k \leq m+k$ sia allora j l'unico naturale tale che $n+k+j = m+k$ ma allora $n + j = m$ per eliminazione [27V].

- Se $n \leq m$ allora $m = n + h$ dunque $m \times k = n \times k + h \times k$ così $n \times k \leq m \times k$. Viceversa sia $k \neq 0$ e sia $n \times k \leq m \times k$ cioè $n \times k + j = m \times k$: dividiamo j per k usando la divisione con resto [28J], scriviamo $j = q \times k + r$ dunque per associatività $(n + q) \times k + r = m \times k$, ma per unicità della divisione con resto $r = 0$: infine raccogliendo $(n + q) \times k = m \times k$ e usando [28M] concludiamo che $(n + q) = m$.

□