

Proposizione 4.40. $[28Z] \leq$ è una relazione di ordine totale.

Dimostrazione. Si considera la proposizione

$$P(n) \doteq \forall m \in \mathbb{N}, n \leq m \vee m \leq n$$

Si ha che $P(0)$ è vera. Diamo per vera $P(n)$; prendiamo un m ;

- se $m \leq n$ allora $m \leq S(n)$ per il lemma (punto [2]), così $P(Sn)$ vale;
- se $\neg m \leq n$ ma $P(n)$ vale, allora $n \leq m$, ma non potendo essere $n = m$, si ottiene $n < m$, che comporta $S(n) \leq m$ per il lemma (punto [4]);

in ogni caso $P(S(n))$ è dimostrata partendo da $P(n)$. □