

Esercizio 6.48. [29R] Prerequisiti: [20F], [29J], [06M], [06R], [0FT]. Difficoltà: *

il 2022-11-24)

Sia $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di I , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ funzione. Come in [29J] siano \mathcal{F} tutti gli intorno di x_0 con l'ordinamento filtrante

$$U, V \in \mathcal{F}, U \leq V \iff U \supseteq V.$$

Sia

$$s, i : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}, \quad s(U) = \sup_{x \in U \cap I} f(x), \quad i(U) = \inf_{x \in U \cap I} f(x)$$

notate che sono funzioni monotone, e mostrate che ^a

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{U \in \mathcal{F}} s(U) = \lim_{U \in \mathcal{F}} s(U) \quad (6.49)$$

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{U \in \mathcal{F}} i(U) = \lim_{U \in \mathcal{F}} i(U) \quad (6.50)$$

dove i limiti sono definiti in [0FR].

^acf [6.39], [(6.40)].