Esercizi

E8.102 [2BP] Prerequisiti: [0KK], [0MM], [0K4]. Difficoltà: *. Sia Ω un insieme infinito più che numerabile; consideriamo $X = \mathbb{R}^\Omega$ con la topologia τ vista in [0MM].

1. Mostrate che ogni punto in (X, τ) non ammette un sistema fondamentale numerabile di intorni.
2. Posto

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in X, f(x) \neq 0 \text{ per al più numerabili } x \in \Omega\} \tag{8.103}$$

   mostrate che si ha $\overline{C} = X$;
3. che se $(f_n) \subset C$ e $f_n \to f$ puntualmente allora $f \in C$.
4. Sia I l'insieme di tutti i sottoinsiemi finiti di Ω, questo è un insieme filtrante se ordinato per inclusione; consideriamo la rete

$$\varphi : I \to X \quad , \varphi(A) = \mathbb{1}_A$$

   si ha che $\forall A \in I, \varphi(A) \in C$ ma

$$\lim_{A \in I} \varphi(A) = \mathbb{1}_X \notin C \quad .$$

Soluzione 1. *[2BQ]*