

Nota 2.3. I simboli $()$ usati per le parentesi sono purtroppo sovraccarichi di significati nel linguaggio matematico comune. [2FG]

- Sono usati per raggruppare operazioni algebriche, per indurre un diverso ordine di operazioni (rispetto alle regole standard di precedenza). Ad esempio, per $x, y \in \mathbb{R}$, ^{†1} l'espressione $x(y + 2)$ è identica a $xy + 2x$ e non a $xy + 2$.
- Sono usati per indicare argomenti di funzioni. Ad esempio l'espressione $f(x + y)$ dovrebbe essere letta come $fx + fy$, se $f, x, y \in \mathbb{R}$ ^{†2}; mentre, se f è una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow B$, allora $f(x + y)$ è il risultato $f(z)$ ottenuto valutando f sull'elemento $z = x + y$.

Per distinguere questi due usi, può essere sufficiente aggiungere un simbolo esplicito per indicare la "moltiplicazione", ad esempio scrivere $f * (x + y)$ quando dovrebbe essere letto come $f * x + f * y$. (Alcuni autori scrivono anche $f.(x + y)$ con un "punto")

- Sono usati per definire intervalli, ad esempio, $(1, \pi)$ può essere l'abbreviazione di: «l'insieme dei numeri reali maggiori di 1 e minori di π ;» cioè

$$(1, \pi) = \{t \in \mathbb{R} : 1 < t < \pi\};$$

questo si estende agli insiemi ordinati, si veda Sez. [2DW].

- Sono usati per rappresentare elementi del prodotto cartesiano; ad esempio, $(1, \pi)$ è un punto in \mathbb{R}^2 con 1 come ascissa e π come ordinata.

Mentre la prima e la seconda situazione sono solitamente discernibili e riconoscibili, la terza e la quarta possono causare confusione.

È necessaria una certa attenzione nell'analisi delle frasi che coinvolgono prodotti cartesiani di insiemi ordinati, come ad esempio: «un punto (x, y) nel rettangolo R del piano che è il prodotto $R = (0, 1) \times (2, 4)$ ». Qui (x, y) è un punto in \mathbb{R}^2 mentre $(0, 1), (2, 4)$ sono intervalli in \mathbb{R} .

Per evitare confusione, possiamo usare una notazione diversa per i punti e/o per gli intervalli: molti simboli simili a "parentesi" sono disponibili al giorno d'oggi nello spazio di codice Unicode esteso; e sono utilizzabili in \LaTeX usando il pacchetto `unicode-math`.

Ad esempio, nell'affermazione precedente, possiamo usare questa notazione (non standard): parentesi barrate $\{\dots\}$ per indicare il punto in \mathbb{R}^2 con x come ascissa e y come ordinata; le doppie parentesi $(a, b) = \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$ per gli intervalli; in modo da ottenere «un punto $\{x, y\}$ nel rettangolo R del piano che è il prodotto $R = (0, 1) \times (2, 4)$ ». In questo caso, per coerenza tipografica, possiamo usare allo stesso tempo doppie parentesi quadre per intervalli chiusi, ad esempio $\llbracket 2, 4 \rrbracket$.

Questo può essere considerato eccessivo per questo esempio. Ma la situazione può essere più complicata!

Ad esempio, potremmo avere a che fare con intervalli di elementi di un insieme ordinato X , che è anche un prodotto cartesiano $X = X_1 \times X_2$ di insiemi ordinati X_1, X_2

^{†1}O, più in generale, se x, y sono elementi di un anello dove la moltiplicazione è indicata dalla giustapposizione di simboli.

^{†2}Di nuovo, più in generale, se f, x, y sono elementi di un anello dove la moltiplicazione è denotata dalla giustapposizione.

(!) ^{†3} In tal caso, possiamo prima etichettare gli ordinamenti: \leq_1 essendo la relazione d'ordine su X_1 , \leq_2 essendo la relazione d'ordine su X_2 , e \leq essendo la relazione d'ordine su X ; e utilizzare una notazione (non standard) per gli intervalli, ad esempio

$$(a, b)_1 = \{t \in X_1 : a <_1 t <_1 b\}$$

per gli intervalli aperti nel primo insieme (con estremi $a, b \in X_1$),

$$(z, w)_\leq = \{x \in X : w < x < z\}$$

per intervalli aperti nel prodotto cartesiano X (con estremi $z, w \in X$), e così via. Ancora una volta, per coerenza tipografica, possiamo usare doppie parentesi quadre per intervalli chiusi, come ad esempio

$$\llbracket a, b \rrbracket_1 = \{x \in X_1 : a \leq_1 x \leq_1 b\}$$

e così via.

Nel seguito useremo spesso le usuali parentesi $()$, come è consuetudine; ma in certi contesti useremo la notazione proposta in questa nota (quando potrebbe aiutare nella comprensione del testo).

^{†3}Ed esiste un metodo standard per ordinare un prodotto cartesiano di insiemi ordinati, si veda Sez. [2FH].